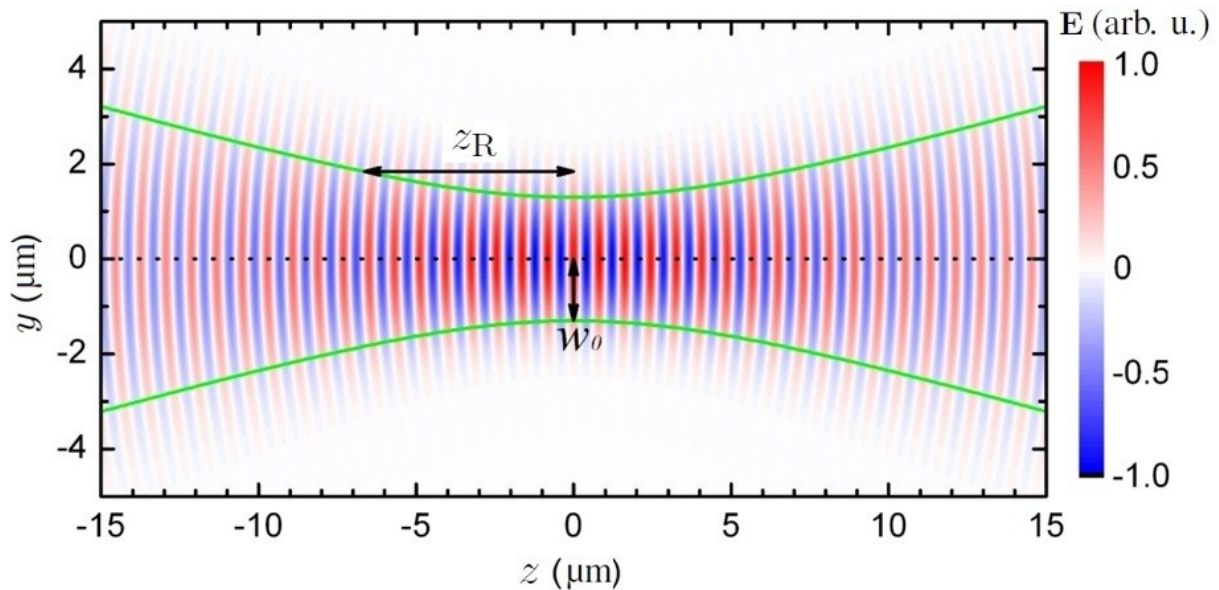


LES FAISCEAUX GAUSSIENS

(Version 05/2024)



B. Cros, cds.cern.ch

Cyrille HONORÉ

cyrille.honore@polytechnique.edu

Laboratoire de Physique des Plasmas

CNRS - UPMC - UPS

École Polytechnique (Palaiseau, France)

27/05/2024



Introduction

La description des faisceaux par un profil gaussien de taille (waist en anglais) constante n'est qu'une expression approchée d'un mode fondamental de propagation d'une onde électromagnétique, valable en champ proche.

Comme ce mode a une extension spatiale finie, par les lois de la diffraction, elle doit diverger en champ lointain. Nous rappellerons les lois de la diffraction. Elle nous permettront d'étudier l'effet d'un diaphragme sur le faisceau.

Nous verrons aussi comment établir la forme de ce mode à partir des équations de Maxwell. Nous décrivons dans la section suivante les propriétés de ce mode : sa divergence. Cette solution par une équation de proche en proche nous permettra d'aborder la transformation de ce mode par une lentille.

Table des matières

Introduction.....	2
1 Le mode gaussien.....	2
1.1 Première approche : La diffraction de Fresnel.....	2
1.2 Équation de l'onde paraxiale.....	5
1.3 Profil Gaussien.....	7
2 Propriétés du mode gaussien.....	10
2.1 Expression du faisceau gaussien.....	10
2.2 Propagation des faisceaux gaussiens à travers une lentille mince.....	12
2.3 Diamètre utile des faisceaux gaussiens.....	14
Bibliographie.....	16

1 Le mode gaussien

1.1 Première approche : La diffraction de Fresnel

Les lois de la diffraction s'appliquent pour une onde monochromatique de pulsation ω_i à polarisation linéaire. Elles s'appliquent à la partie spatiale du champ électrique (ou magnétique) de l'onde :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re (E_{i0}(\vec{r}) \vec{e}_x e^{i\omega_i t})$$

La diffraction, permet de calculer la forme du champ scalaire en aval ($z > 0$) du plan initial, directement à partir de la valeur du champ dans le plan initial ($z' = 0$).

La valeur du champ dans le plan initial est donnée : Il s'agira d'une onde plane à profil gaussien de taille w :

$$E_{i0}(r, z) = E_{iM} e^{-r^2/w_0^2}$$

Comme nous le verrons plus loin, la taille faisceau gaussien diverge depuis le plan où l'onde est plane : ce plan initial est également appelé le plan de pincement du faisceau gaussien.

1.a Principe de la diffraction d'Huygens-Fresnel

Suivant le principe de la diffraction d'Huygens-Fresnel, chaque point du plan initial est considéré comme une source. La valeur du champ est calculée comme la superposition des ondes sphériques issues de chacune de ces sources ponctuelles.

La loi de Sommerfeld donne une solution approchée de l'équation d'onde dans le vide, valable si la distance entre le plan initial et le point de mesure est grande devant la longueur d'onde :

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \gg \lambda_i$$

Le champ électrique au point \vec{r} est alors donné par la l'intégrale :

$$E_{i0}(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda_i} \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{i0}(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{e}_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} e^{-ik_i |\vec{r}' - \vec{r}|} dx' dy'$$

où, pour simplifier l'écriture, nous notons :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y$$

1.b Diffraction de Fresnel : approximation paraxiale

On se place dans l'approximation paraxiale, où la dimension du faisceau dans le plan initial a , et la distance du point de mesure à l'axe sont petites devant la distance suivant l'axe :

$$z^2 \gg (x - x')^2 + (y - y')^2$$

L'expression de la distance $|\vec{r} - \vec{r}'|$ se développe au premier ordre :

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \sim z + \frac{(x - x')^2}{2z} + \frac{(y - y')^2}{2z}$$

L'expression du facteur de décroissance des ondes sphériques centrées sur chaque source, se simplifie comme le facteur de décroissance d'une onde sphérique unique :

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{e}_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \sim \frac{1}{z}$$

Cette approximation correspond à la loi de la diffraction de Fresnel :

$$E_{i0}(x, y, z) = \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} \iint E_{i0}(x', y', 0) e^{-ik_i [(x - x')^2 + (y - y')^2]/2z} dx' dy'$$

Cette approximation n'est a priori pas valide pour le profil initial gaussien : celui-ci s'étend dans tout le plan initial. Néanmoins sa décroissance radiale est suffisamment rapide pour pouvoir considérer que sa dimension est finie. Elle est proportionnelle à la taille initiale du faisceau :

$$a = 2w_0$$

Nous justifierons plus loin le choix du facteur de proportionnalité.

Appliquée au profil gaussien du faisceau dans le pincement, la formule de la diffraction de Fresnel permet de retrouver l'expression analytique de son expansion suivant l'axe de propagation. Le résultat est le même que la solution que nous trouverons par la résolution de l'équation d'onde dans la section suivante.

1.c Diffraction de Fraunhofer : approximation en champ lointain

On se place en champ lointain : la distance sur l'axe z est grande devant la longueur de Fresnel associée à la dimension du faisceau dans le plan initial a : $z \gg a^2/\lambda_i$.

$$\frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z} \sim \frac{x^2}{2z} + \frac{y^2}{2z} - \frac{xx'}{z} - \frac{yy'}{z}$$

La diffraction de Fresnel se reformule, en champ lointain, par l'intégrale de Fraunhofer :

$$E_{i0}(x, y, z) = \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} e^{-ik_i(x^2+y^2)/2z} \iint E_{i0}(x', y', 0) e^{ik_i(xx' + yy')/z} dx' dy'$$

Les 2 premiers facteurs décrivent la forme de l'onde : la forme sphérique du front d'onde et la décroissance en $1/z$ de son module.

L'intégrale s'écrit comme une transformée de Fourier suivant les 2 directions transverses x et y :

$$E_{i0}(x, y, z) = \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} e^{-ik_i(x^2+y^2)/2z} \hat{E}_{i0}^*\left(\frac{k_x x}{z}, \frac{k_y y}{z}, 0\right)$$

où

$$\hat{E}_{i0}(k_x, k_y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{i0}(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Le module du champ électrique en champ lointain ne dépend plus que de x et y , à travers les angles dans chacune des deux directions transverses :

$$|E_{i0}(x, y, z)| = \frac{1}{\lambda_i z} |\hat{E}_{i0}(k_x \xi_x, k_y \xi_y, 0)|$$

où

$$\xi_x = x/z$$

$$\xi_y = y/z$$

Du fait de cette transformée de Fourier, la largeur angulaire en champ lointain est reliée la largeur du profil dans le plan initial par la relation d'incertitude :

$$\langle x_0^2 \rangle k_i^2 \langle \xi_x^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$$

où

$$\langle x_0^2 \rangle = \frac{1}{\iint |E_{i0}(x, y, 0)|^2 dx dy} \iint x^2 |E_{i0}(x, y, 0)|^2 dx dy$$

et

$$\langle \xi_x^2 \rangle = \frac{1}{\iint |\hat{E}_{i0}(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y} \iint \frac{k_x^2}{k_i^2} |\hat{E}_{i0}(k_x, k_y, 0)|^2 dk_x dk_y$$

Pour le profil gaussien, cette inégalité devient une égalité : Le profil gaussien est

le profil pour lequel, à taille initiale fixée ($\langle x_0^2 \rangle$), l'angle de divergence en champ lointain est le plus faible.

Les variances ne sont pas calculées sur le champ lui-même, mais son module au carré : Ce sont donc les variances de la distribution de puissance électromagnétique qui rentrent en compte ici.

1.d Divergence gaussienne du mode gaussien

Pour le profil gaussien :

$$E_{i0}(r, z) = E_{iM} e^{-r^2/w_0^2}$$

La distribution angulaire en champ lointain vaut :

$$E_{i0}(x, y, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} e^{-ik_i(x^2+y^2)/2z} e^{-(x^2+y^2)k_i^2 w_0^2/2z^2}$$

1.e Diffraction de Fresnel à symétrie axiale

La formule de diffraction de Fresnel se simplifie si le profil dans le plan initial est à symétrie axiale autour de l'axe de propagation \vec{e}_z :

$$E_{i0}(r, z) = \frac{k_i}{iz} e^{-ik_i z} e^{-ik_i r^2/2z} \int_0^a E_{i0}(r', 0) J_0(k_i r r' / z) e^{-ik_i r'^2/2z} r' dr'$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0, définie par :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

1.2 Équation de l'onde paraxiale

2.a Équations de Maxwell

Pour retrouver la forme du mode gaussien, nous revenons aux équations de Maxwell que nous appliquons à l'onde incidente. L'équation de Maxwell-Ampère est appliquée dans l'air, décrit comme un milieu linéaire, homogène, isotrope, non magnétique, non dispersif et sans perte. Le milieu est un espace libre, sans terme source :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_i(\vec{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_i(\vec{r}, t)$$

que nous associerons avec l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_i(\vec{r}, t)$$

En utilisant l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \nabla^2 \vec{A}$, le fait que dans le milieu est sans source $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i(\vec{r}, t) = 0$, ainsi que les relations

$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{C^2}$ et la définition de l'indice optique $\epsilon = n^2$ nous retrouvons l'équation d'onde :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_i(\vec{r}, t) - \frac{n^2}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = 0$$

2.b Équation d'Helmutz

Nous cherchons les solutions monochromatiques à la pulsation ω_i :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re(\vec{E}_{i0}(\vec{r}) e^{i\omega_i t})$$

La partie spatiale du champ doit alors suivre l'équation d'Helmutz portant sur les variations spatiales du champ :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_{i0}(\vec{r}) + k_i^2 \vec{E}_{i0}(\vec{r}) = 0$$

où $k_i = n\omega_i/C$ est le nombre d'onde de l'onde à la pulsation ω_i dans le milieu d'indice n .

Nous supposons qu'il existe des solutions à polarisation linéaire :

$$\vec{E}_{i0}(\vec{r}) = E_{i0}(\vec{r}) \vec{e}_x$$

L'équation vectorielle est remplacée par une équation scalaire :

$$\vec{\nabla}^2 E_{i0}(\vec{r}) + k^2 E_{i0}(\vec{r}) = 0$$

Cette équation a une solution simple, l'onde plane, homogène dans tout l'espace :

$$E_{i0}(\vec{r}) = E_{iM} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

où la direction de \vec{k}_i est quelconque.

Appliqué à tout l'espace, sauf un point origine quelconque, l'onde sphérique est aussi une solution :

$$E_{i0}(\vec{r}) = \frac{A_{iM}}{r} e^{-ik_i r}$$

Ces solutions occupent tout l'espace. Du fait de la diffraction, une onde confinée dans l'espace ne conserve pas son profil original. Il n'y a pas de solution évidente où l'onde a une extension finie dans l'espace.

2.c Équation de l'onde paraxiale

Nous cherchons alors plus généralement des solutions sous forme d'une onde dirigée suivant la direction \vec{e}_z , avec un profil $u_i(\vec{r})$:

$$E_{i0}(\vec{r}) = E_{iM} u_i(\vec{r}) e^{-ik_i z}$$

$E_{iM} = \max |E_{i0}(\vec{r})|$ est le maximum du module du champ. Le profil est alors une fonction spatiale sans dimension, qui doit alors vérifier alors $\max(u_i(\vec{r})) = 1$. Le produit $E_{iM} u(\vec{r})$ est l'enveloppe du champ $E_{i0}(\vec{r})$.

Le profil doit satisfaire l'équation :

$$\vec{\nabla}^2 u_i(\vec{r}) - 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_i(\vec{r}) = 0$$

On suppose que les variations du profil suivant l'axe de propagation sont lentes comparé à la longueur d'onde :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \ll 2k_i \frac{\partial u_i}{\partial z}$$

L'équation du profil se simplifie alors en l'équation d'onde paraxiale :

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 u_i(\vec{r}) - 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_i(\vec{r}) = 0$$

où $\vec{\nabla}_{\perp}^2$ correspond au laplacien dans la direction perpendiculaire à la propagation :

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

1.3 Profil Gaussien

3.a Forme de solutions de l'équation d'onde paraxiale

Nous recherchons des solutions à symétrie axiale de l'équation : $u_i(\vec{r}) = u_i(r, z)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'équation de l'onde paraxiale s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u_i \right) - 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_i = 0$$

Nous recherchons des solutions qui s'approchent du profil gaussien uniforme suivant z , $u_i(r, z) = u_{i0} e^{-r^2/w_0^2}$. Celui-ci n'est pas solution de l'équation, car du fait de la divergence naturelle, l'onde devient une onde sphérique à longue distance : la forme doit inclure une taille dépendant de z , $w(z)$, et un terme de phase décrivant la forme sphérique des fronts d'onde : $e^{-ikr^2/2R(z)}$. Du fait de la divergence, et afin de conserver la puissance de l'onde, la normalisation doit aussi dépendre de z , $u_{iz}(z)$. Nous allons rechercher des solutions de la forme :

$$u_i(r, z) = u_{iz}(z) e^{-r^2/w(z)^2 - ikr^2/2R(z)}$$

L'équation de l'onde paraxiale va être réécrite une équation différentielle du premier ordre sur les fonctions $u_{iz}(z)$, $w(z)$ et $R(z)$. Nous donnons les conditions initiales dans le plan origine $z=0$ correspondant à un profil gaussien : l'onde a pour taille $w(0) = w_0$; le front d'onde est plan : $R(0) = +\infty$. L'onde étant plane dans ce plan, elle divergera à partir de celui. C'est dans ce plan que $u_{iz}(z)$ sera maximum : $u_{iz}(0) = 1$. Le profil initial s'exprime alors :

$$u_i(r, z=0) = e^{-r^2/w_0^2}$$

3.b Résolution par les paramètres p et q

Pour simplifier l'écriture, nous introduisons les 2 paramètres complexes $p(z)$ et $q(z)$ pour séparer les variations sur l'axe, des variations radiales du mode.

$p(z)$ est définie par :

$$u_{iz}(z) = e^{-ip(z)}$$

La partie réelle de $p(z)$ exprime donc la phase du mode le long de l'axe de

propagation. Sa partie imaginaire contient l'information sur l'amplitude du champ sur l'axe.

Le paramètre $q(z)$ est défini par :

$$u_i(r, z) = u_{iz}(z) e^{-i k_i r^2 / 2 q(z)}$$

la partie réelle de $1/q(z)$ décrit les variations radiales de la phase. Sa partie imaginaire décrit la décroissance radiale de l'amplitude du champ.

$1/q(z)$ s'exprime par :

$$1/q(z) = 1/R(z) - 2i/k_i w^2(z)$$

Le profil du mode s'exprime alors :

$$u_i(r, z) = e^{-i p(z) - i k_i r^2 / 2 q(z)}$$

Équations sur les paramètres p et q

Nous introduisons cette forme dans l'équation de l'onde paraxiale :

$$\left[\left(\frac{-k^2}{q^2} r^2 - \frac{2i k_i}{q} \right) - 2i k_i \left(-i \frac{d p}{d z} - i \frac{k_i r^2}{2 q^2} \frac{d q}{d z} \right) \right] u = 0$$

soit, en réarrangeant les termes :

$$\left[\left(\frac{-k_i^2}{q^2} - 2k_i \frac{k_i}{2 q^2} \frac{d q}{d z} \right) r^2 + \left(\frac{-2i k_i}{q} - 2 k_i \frac{d p}{d z} \right) \right] u = 0$$

Nous cherchons des solutions non triviales ($u_i \neq 0$), vérifiant l'équation pour tout r . Les 2 facteurs entre parenthèses doivent alors être nuls. Le profil doit alors être solution du système d'équations :

$$\frac{d q}{d z} = 1$$

$$\frac{d p}{d z} = \frac{-i}{q}$$

À l'origine $z=0$, les valeurs initiales sont :

$$q(0) = i z_R$$

$$p(0) = 0$$

où z_R est la longueur de Rayleigh :

$$z_R = k_i w_0^2 / 2 = \pi w_0^2 / \lambda_i$$

La solution pour $q(z)$ est simplement :

$$q(z) = z + i z_R$$

Sa partie réelle exprime donc simplement l'abscisse suivant l'axe du mode (avec l'origine au point de pincement). Sa partie imaginaire est la distance de Rayleigh du mode

La solution pour $p(z)$ est :

$$i p(z) = \ln(1 - i z/z_R)$$

Son expression est moins directe que pour $q(z)$. Nous verrons plus loin son interprétation.

La solution pour le profil est alors :

$$u_i(r, z) = \frac{1}{1 - i z/z_R} e^{-i k_i r^2 / 2(z + i z_R)}$$

3.c Formulation du profil en paramètres physique

Pour analyser la forme de ce mode, nous identifions la solution pour le profil avec son expression dans une forme plus proche de la physique :

$$u_i(r, z) = u_{iz}(z) e^{-r^2/w(z)^2 - i k_i r^2 / 2 R(z)}$$

Le second facteur de la solution est réécrit en séparant partie réelle et imaginaire pour pouvoir identifier les paramètres $w(z)$ et $R(z)$:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$$

Du fait de la divergence, la taille du faisceau croît de puis l'origine où l'onde est plane.

$$R(z) = z + z_R^2/z$$

Le rayon de courbure décroît depuis l'origine (où l'onde est plane), jusqu'à la distance de Rayleigh $z = z_R$, pour ré-augmenter au delà (l'onde devient asymptotiquement sphérique).

Le premier facteur se décompose en module et phase :

$$\frac{1}{1 - i z/z_R} = \frac{e^{i \arctan(z/z_R)}}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} = \frac{w_0}{w(z)} e^{i \phi(z)}$$

La phase $\phi(z) = \arctan(z/z_R)$ est la phase de Gouÿ [Gouy1890]. Cette phase va modifier légèrement la phase de l'onde suivant l'axe de propagation. Elle écarte légèrement les fronts d'onde, essentiellement en champ proche : la vitesse de phase est légèrement accélérée. La phase de Gouÿ ne varie que de 0 à $\pi/2$ entre l'origine et l'infini suivant l'axe, alors que le terme principal de la phase varie de 2π pour chaque période axiale λ .

Le module du profil décroît suivant $w_0/w(z)$ pour équilibrer l'étalement radial de l'onde.

Le profil du faisceau s'écrit :

$$u_i(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2} e^{i \phi(z) - i k_i r^2 / 2 R(z)}$$

Expression du champ électrique

Le champ électrique complet associé à ce profil est :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re \left(E_{iM} \vec{e}_x \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2} e^{i(\omega t + \phi(z) - k_i z)} e^{-i k_i r^2 / 2 R(z)} \right)$$

2 Propriétés du mode gaussien

2.1 Expression du faisceau gaussien

Nous résumons ici la forme du champ électrique du mode gaussien de taille au pincement w_0 . Il est aussi appelé mode transverse fondamental ou mode TEM_{0,0} :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re \left(E_{iM} \vec{e}_x \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2} e^{i(\omega t + \phi(z) - k_i z)} e^{-i k_i r^2 / 2 R(z)} \right)$$

E_{iM} est l'amplitude maximum du champ

\vec{e}_x est sa polarisation linéaire.

1.a Phase de l'onde sur l'axe

$e^{i(\omega t + \phi(z) - k_i z)}$ est le facteur de phase de l'onde sur l'axe. C'est le même que celui de l'onde plane $e^{i(\omega t - k_i z)}$, corrigé de la phase de Gouy $e^{i\phi(z)}$:

$$\phi(z) = \arctan(z/z_R)$$

où z_R est la distance de Rayleigh

$$z_R = \pi w_0^2 / \lambda_i$$

1.b Divergence du profil gaussien

$\frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2}$ est le module du profil. Le profil reste toujours gaussien dans la direction perpendiculaire, mais sa taille augmente avec la distance suivant l'axe :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

À distance petite devant z_R , en champ proche, le mode diverge lentement : le profil peut être considéré constant :

$$w(z) \underset{z \ll z_R}{\sim} w_0$$

À la distance z_R , la taille n'a grandi que d'un facteur $\sqrt{2}$:

$$w(z_R) = w_0 \sqrt{2}$$

À longue distance, en champ lointain, la taille croît linéairement avec la distance sur l'axe :

$$w(z) \underset{z \gg z_R}{\sim} \frac{w_0 z}{z_R}$$

Le mode diverge en champ lointain avec un demi-angle d'ouverture ξ :

$$\xi = \frac{w(z)}{z} \sim \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda_i}{\pi w_0}$$

La normalisation du profil $w_0/w(z)$ assure que la puissance de l'onde reste constante le long de l'axe :

$$P_i = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y^2+z^2)/w_0^2} dydz$$

$$P_i = \frac{\pi w(z)^2 N}{2 \mu_0 C} \left(E_{iM} \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 = \frac{\pi w_0^2 N}{2 \mu_0 C} E_{iM}^2 = P_{i0}$$

1.c Rayon de courbure du front d'onde

Le facteur $e^{-ik_i r^2/2R(z)}$ décrit la phase de l'onde dans la direction perpendiculaire. $R(z)$ est le rayon de courbure :

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

En champ proche, l'onde est quasi plane :

$$R(z) \gg z_R \quad z \ll z_R$$

À la distance de Rayleigh z_R , la courbure est maximale (le rayon, minimal) :

$$R(z) = 2 z_R$$

En champ lointain, l'onde est quasi sphérique :

$$R(z) \sim z \quad z \gg z_R$$

Formules inverses

La connaissance de la taille $w(z)$ et du rayon de courbure $R(z)$ permet de retrouver le waist initial w_0 et la position.

En effectuant le rapport de l'expression de $w(z)$ au carré et de $R(z)$, on déduit :

$$\frac{z}{z_R} = \frac{\pi w(z)^2}{\lambda_i R(z)}$$

d'où :

$$w_0^2 = w(z)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi w(z)^2}{\lambda_i R(z)} \right)^2}$$

et

$$z = R(z) \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda_i R(z)}{\pi w(z)^2} \right)^2}$$

1.d Approximation du champ proche

Nous voyons qu'en champ proche le mode gaussien est proche d'une onde plane à forme gaussienne à rayon constant. Ceci justifie l'approximation faite pour décrire les profils des faisceaux et le profil du volume de diffusion à condition la demi-longueur du volume de diffusion (si le pincement est au centre), soit notablement plus courte que la longueur de Rayleigh de chacun des faisceaux :

$$\frac{\sqrt{\pi} w_0}{\theta} \ll \frac{\pi w_0^2}{\lambda_i}$$

La taille du faisceau doit alors être grande devant la longueur d'onde de diffusion :

$$w_0 \gg \frac{\lambda_i}{\sqrt{\pi} \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}$$

Cette condition se rapproche de celle pour obtenir une bonne résolution relative en nombre d'onde de la diffusion.

2.2 Propagation des faisceaux gaussiens à travers une lentille mince

Pour étudier la transmission des faisceaux gaussiens à travers des optiques, nous décrivons le faisceau par un ensemble de rayons paraxiaux. H. Kogelnik a donné une formulation synthétique de ce modèle [Kogelnik1966].

2.a Transmission d'une lentille mince

Nous nous limiterons au cas où la lentille est centrée sur le même axe que le faisceau, afin de conserver la symétrie cylindrique.

Une lentille mince est un milieu d'indice optique, n_f limité par 2 surfaces sphériques R_{f1} et R_{f2} distantes d'une longueur e_f sur l'axe. Par convention, le rayon de courbure est positif si la face de la lentille est convexe, négatif pour une face concave. Les centres des sphères sont sur l'axe.

Dans l'hypothèse de la lentille mince, nous supposons que la distance parcourue à travers la lentille est suffisamment courte pour négliger les variations radiales des rayons qui traversent la lentille. De plus, nous supposerons que la lentille n'a d'effet que sur la phase de l'onde. Nous estimerons ce déphasage par les chemins optiques à travers la lentille

À la distance r de l'axe, l'épaisseur de lentille traversée est :

$$e_{fr}(r) = e_f - \left[\frac{r^2}{R_{f1}} + \frac{r^2}{R_{f2}} \right]$$

Les chemins optiques sont donc modifiés de la quantité :

$$s_{fr}(r) = (n_f - 1) e_f - (n_f - 1) \left[\frac{r^2}{R_{f1}} + \frac{r^2}{R_{f2}} \right]$$

La focale de lentille, f , apparaît naturellement :

$$\frac{1}{f} = (n_f - 1) \left[\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} \right]$$

La focale sera positive pour une lentille convergente.

La fonction de transmission à travers la lentille, $T(r)$, qui traduit le déphasage qui lui est propre s'exprime alors :

$$T(r) = e^{-i k_i (n_f - 1) e_f} e^{+i k_i r^2 / 2 f}$$

Pour une lentille placée en z_0 , le profil de l'onde derrière la lentille $u'_i(r, z_0)$

est déduit du profil avant la lentille $u_i(r, z_0)$ par la fonction de transmission :

$$u'_i(r, z_0) = T(r) u_i(r, z_0)$$

2.b Transformation des paramètres p et q par la lentille

Nous reprenons l'expression des profils u_i et u'_i en fonction des paramètres p et q :

$$u_i(r, z) = e^{-ip(z) - ik_i r^2 / 2q(z)}$$

$$u'_i(r, z) = e^{-ip'(z) - ik_i r^2 / 2q'(z)}$$

La transmission à travers la lentille s'écrit :

$$e^{-ip'(z) - ik_i r^2 / 2q'(z)} = e^{-ik_i(n_f - 1)e_f} e^{+ik_i r^2 / 2f} e^{-ip(z) - ik_i r^2 / 2q(z)}$$

Par identification, on déduit l'effet de la lentille sur les paramètres p et q :

$$p'(z) = p(z) + k_i(n_f - 1)e_f$$

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{1}{q(z)} - \frac{1}{f}$$

La forme du faisceau reste gaussienne, mais avec des paramètres p et q modifiés.

2.c Position du pincement et taille du faisceau derrière la lentille

Pour une distance d entre le pincement initial et la lentille, la valeur de q à l'approche de la lentille est :

$$q(z_f) = d - iz_R$$

Juste derrière la lentille, le paramètre q vaut :

$$\frac{1}{q'(z_f)} = \frac{1}{d - iz_R} - \frac{1}{f}$$

Comme la partie de q est l'abscisse de l'onde par rapport à la position du pincement, la distance de la lentille au point de pincement du faisceau est donnée par :

$$d' = -\Re[q'(z_f)]$$

Elle vaut :

$$d' = f + (d - f) \frac{f^2}{(d - f)^2 + z_R^2}$$

Comme la distance de Rayleigh du faisceau est donnée par la partie imaginaire de q :

$$z_R' = \Im[q'(z_f)]$$

On peut déduire la valeur du pincement derrière la lentille ($z_R' = \pi w_0'^2 / \lambda_i$) :

$$w_0'^2 = w_0^2 \frac{f^2}{(d - f)^2 + z_R^2}$$

Si le pincement du faisceau initial est au point focal de la lentille :

$$d = f$$

le pincement image se trouve au plan focal image :

$$d' = f$$

le pincement image vaut :

$$w_0' = \frac{f \lambda_i}{\pi w_0}$$

C'est le pincement le plus grand que l'on puisse obtenir pour une distance d variable.

2.d Cavité laser

Une cavité laser est généralement formée d'un miroir plan semi-transparent et un miroir sphérique, espacés d'une distance L . Le second miroir est sphérique pour éviter la divergence du faisceau dans la cavité.

Un miroir sphérique de rayon R_f peut être décrit comme une lentille avec une focale :

$$f = \frac{1}{R_f}$$

Le seul mode stationnaire qui puisse être présent sera un mode gaussien, dont le pincement sera placé sur le miroir plan, et dont l'image par le miroir sphérique sera un mode dont le pincement sera aussi placé sur le miroir plan, avec le même pincement.

Il faut alors :

$$f = L$$

et

$$w_0 = \frac{f \lambda_i}{\pi w_0}$$

soit :

$$f = L = z_R$$

Nous remarquons que le rayon de courbure du mode gaussien sur le miroir sphérique est :

$$R(z_R) = 2 z_R = R_f$$

Le rayon de courbure de l'onde est le même que celui du miroir : le système est dit con-focal pour ce mode.

2.3 Diamètre utile des faisceaux gaussiens

Le mode gaussien a théoriquement une extension spatiale dans tout l'espace. Dans la réalité, la propagation du mode est toujours limitée par la taille des optiques utilisées. Quelle est la conséquence sur la propagation du mode gaussien? Quelle est la limite acceptable pour sa déformation? Cette question a été étudiée par, entre autres, P. Belland et al. [Belland1982].

Nous exposerons ici la forme la plus simple du problème. Nous supposons que le faisceau gaussien est limité par une ouverture plane circulaire de rayon a , centrée sur le faisceau, située dans le plan de pincement de celui-ci ($z=0$). Nous nous intéressons à la forme du faisceau ainsi tronqué en champ lointain.

3.a Puissance du faisceau tronqué

Nous avons vu que la puissance du faisceau gaussien dans le plan de pincement est donnée par :

$$P_i = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y^2+z^2)/w_0^2} dydz$$

Comme le faisceau est à symétrie circulaire, la formule se simplifie :

$$P_i = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2r^2/w_0^2} r dr$$

Pour le faisceau complet, comme nous l'avons vu, la valeur est :

$$P_i = \frac{\pi w_0^2 N}{2\mu_0 C} E_{iM}^2$$

Pour le faisceau tronqué au rayon a , la puissance est diminuée :

$$P_{ia} = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 2\pi \int_0^a e^{-2r^2/w_0^2} r dr$$

soit :

$$P_{ia} = P_i \left(1 - e^{-2a^2/w_0^2} \right)$$

La perte de puissance ne dépend donc que du rapport a/w_0 . L'effet est sensible pour $a/w_0 < 2$:

a/w_0	P_{ia}/P_i
1	86,46%
$\pi/2$	99,28%
2	99,97%
2,5	99,998%

Mais cet effet ne suffit pas à rendre compte de la déformation de l'onde due au diaphragme. Deux autres effets peuvent être évalués :

- un effet d'ondulation (ripple en anglais) sur le profil de l'onde en champ proche. Il a été évalué par Siegman [Siegman1985]. Il n'y a pas de solution analytique.
- un élargissement de l'onde en champ lointain.

Bibliographie

- A. Yariv & P. Yeh, Photonics, Oxford University Press, New York (2007)
Chap. 2.5 : Gaussian beam in homogeneous media
- B.E.A. Saleh & M.C. Teich, Fundamentals of Photonics, J. Wiley and Sons, New York (1991)
Chap. 2 : Beam Optics
- A.E. Siegman, Lasers, University Science Books, Mill Valley Ca (1986)
Chap. 17 : Physical properties of a gaussian beam
- L.-G. Gouÿ, *Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses*, C.R. Académie des Sciences Paris 110 (1890), p. 1251-1253
- H. Kogelnik & T. Li, *Laser beams and resonators*, Applied Optics, 5 (1966), p. 1550-1567
- R.G. Schell & G. Tyras, *Irradiance from an aperture with a truncated gaussian beam distribution*, Journal of the Optical Society of America 61 (1971), p. 31-35
- P. Belland & J. P. Crenn, *Changes in the characteristics of a Gaussian beam weakly diffracted by a circular aperture*, Applied Optics 21 (1982), p. 522-527
- A. Culoma, *Propagation des faisceaux gaussiens. Transport des faisceaux de puissance*, École d'été sur les systèmes optiques, Cargèse, juillet 1991, Collection de la Société Française d'Optique 3 (1992)

Table des matières

1 Le mode gaussien.....	2
1.1 Première approche : La diffraction de Fresnel.....	2
1.2 Équation de l'onde paraxiale.....	5
1.3 Solution de l'équation d'onde paraxiale.....	7
1.4 Expression du profil en paramètres physique.....	9
2 Propriétés du mode gaussien.....	10
2.1 Expression du faisceau gaussien.....	10
2.2 Propagation des faisceaux gaussiens à travers une lentille mince.....	12
2.3 Diamètre utile des faisceaux gaussiens.....	15
Bibliographie.....	17